

$$1. \frac{4(y^2+1)(2y-3)}{2y+4} = 0 \quad / \cdot (2y+4) \quad \begin{matrix} 2y+4 \neq 0 \\ y \neq -2 \end{matrix}$$

$$4(y^2+1)(2y-3) = 0 \quad / :4$$

$$(y^2+1)(2y-3) = 0$$

$$y^2+1=0$$

$$y \in \emptyset$$

$$2y-3=0$$

$$y = \frac{3}{2}$$

$$\underline{\underline{y \in \left\{ \frac{3}{2} \right\}}}$$

$$2. \quad a \in (0; +\infty)$$

$$\frac{(a^3)^{100}}{a^{100} \cdot \sqrt{a^{-100}}} = \frac{a^{300}}{a^{100} \cdot a^{-\frac{100}{2}}} = \frac{a^{300}}{a^{50}} = \underline{\underline{a^{250}}}$$

3. Součin tří čísel v prvním řádku je převrácenou hodnotou součinu tří čísel ve druhém řádku. Doplň do všech polí stejné nenulové číslo

10		4
	25	

$$10 \cdot x \cdot 4 = \frac{1}{25x^2}$$

$$40x = \frac{1}{25x^2}$$

$$1000x^3 = 1$$

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{10}}}$$

4. $a \in \mathbb{R} \setminus \{-5; 5\}$ zjednodušte:

$$\frac{5a}{5-a} - \frac{10a^2}{25-a^2} = \frac{5a(5+a) - 10a^2}{(5-a)(5+a)} = \frac{25a + 5a^2 - 10a^2}{(5-a)(5+a)} =$$

$$= \frac{25a - 5a^2}{(5-a)(5+a)} = \frac{5a(5-a)}{(5-a)(5+a)} = \underline{\underline{\frac{5a}{5+a}}}$$

5. V oboru $\mathbb{R}$ řešte

$$\frac{4}{x-1} - \frac{x+1}{2x-2} = \frac{1}{4} \quad / \cdot 4(x-1) \quad x \neq 1$$

$$16 - (x+1) \cdot 2 = x-1$$

$$16 - 2x - 2 = x-1$$

$$-3x = -15$$

$$\underline{\underline{x = 5}}$$

6.-7. V kocourkově sestavili televizní věž ze samých krychlí.

Dole je největší krychle s délkou 6m a každá následující má hranu o 5 cm kratší. Hrana nejmenší měří 3,5 m.

Každé dvě sousední krychle mají jeden společný vrchol. Při pohledu shora žádná z krychlí nepřechází přes niž položenou krychli.

6. Vypočítejte výšku televizní věže.

$$a_1 = 6 \text{ [m]}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = 3,5 \text{ [m]}$$

$$3,5 = 6 + (n-1) \cdot (-0,05)$$

$$d = -0,05 \text{ [m]}$$

$$3,5 = 6 - 0,05n + 0,05$$

$$0,05n = 2,55$$

$$n = 51 \text{ [řad]}$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

$$S_{51} = \frac{51}{2} (6 + 3,5)$$

$$S_{51} = \underline{\underline{242,25 \text{ m}}}$$

7. Vypočítejte v m^2 obsah všech nezakrytých rovinných ploch televizní věže.

50 ploch + nejmenší kruhový
 nejspodnější: $a_1 = 6^2 - 5,95^2 = 0,5975$

nezakrytá plocha 2. kruhu ze shora: $a_{50} = 3,55^2 - 3,5^2 = 0,3525$

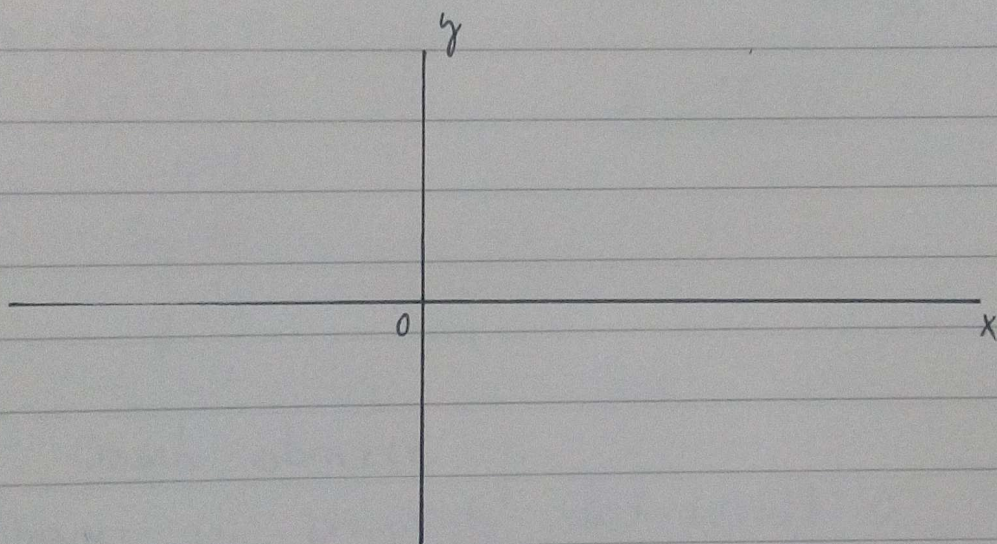
$$S_m = \frac{m}{2} (a_1 + a_m)$$

$$S_{50} = \frac{50}{2} (0,5975 + 0,3525)$$

$$S_{50} = 23,75 m^2$$

Horní plocha: $S_H = 3,5^2 = 12,25 m^2$

celková plocha: $S = 23,75 + 12,25 = \underline{\underline{36 m^2}}$



ve čtverci ABCD platí: $A[-1;1]$, $\vec{AC} = (6;4)$

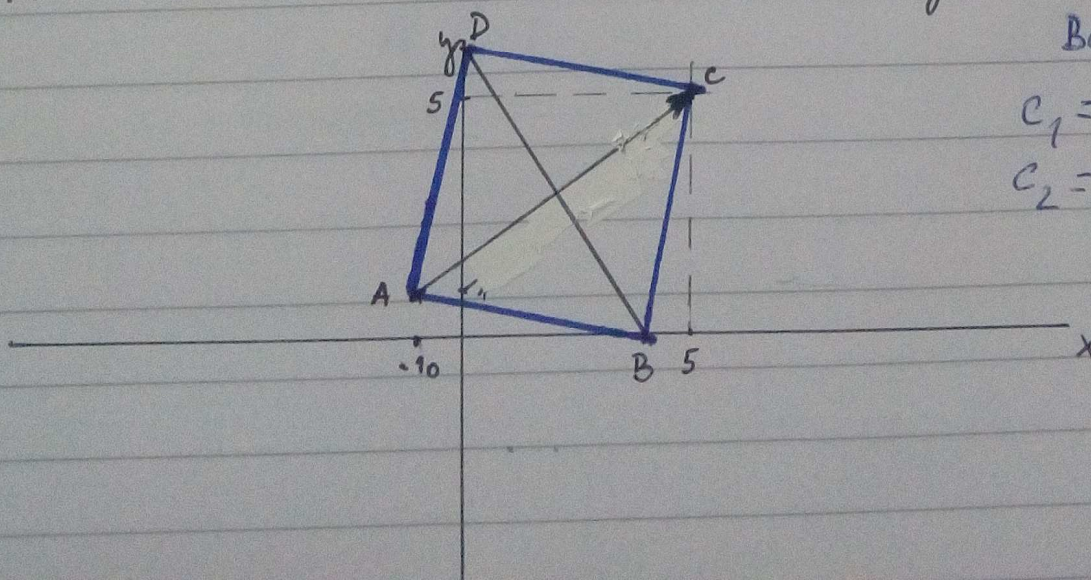
8.1 v kartézské soustavě souřadnic Oxy sestrojte čtverec ABCD

Bod C: $C[c_1; c_2]$

$$c_1 = 6 - 1 = 5$$

$$c_2 = 4 + 1 = 5$$

$$C[5;5]$$



8.2 Zapište souřadnice středu S úsečky ABCD

$S[2;3]$ viz obr. v 8.1

8.3 Vypočítejte velikost vektoru $\vec{AB}$ a výsledek uveďte bez zaokrouhlení

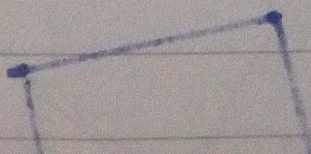
$$|\vec{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

$$A[-1;1] \quad B[4;0]$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{|4 - (-1)|^2 + (0 - 1)^2}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{5^2 + 1^2}$$

$$\underline{\underline{|\vec{AB}| = \sqrt{26}}}$$



9.

9.1 Obecná rovnice přímky p

$$A = [0; 2], B = [6; 4], \vec{AB} = (6; 2), \vec{n} = (2; -6)$$

$$ax + by + c = 0$$

$$2x - 6y + c = 0$$

$$A: 2 \cdot 0 - 6 \cdot 2 + c = 0$$

$$c = 12$$

$$2x - 6y + 12 = 0$$

$$\underline{\underline{x - 3y + 6 = 0}}$$

9.2 Odchylka přímky p a souřadnicové osy x .

$$\vec{x} = (6; 0), \vec{n} = (0; 6)$$

odchylka:

$$ax + by + c = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{|1 \cdot 0 - 3 \cdot 1|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{1}}$$

$$0x + 6y + c = 0$$

$$6 \cdot 0 + c = 0$$

$$c = 0$$

$$6y = 0$$

$$y = 0$$

$$\underline{\underline{\alpha = 18^\circ 26'}}$$

10.

Obsah obrazce

Obrazec je pravouhlý lichoběžník $\Rightarrow$

$$S = \frac{a+c}{2} \cdot v$$

$$S = \frac{4+2}{2} \cdot 6$$

$$\underline{\underline{S = 18 [j^2]}}$$

11. Obchod při prodeji snížil původní cenu zboží o 40%.
Naně slym věrným zákazníčkům rozeslal SMS zprávu
s nabídkou další 15% slevy z ceny již zlevněného
zboží. Vypočítejte, o kolik procent se původní cena zboží
snížila věrným zákazníkům, kteří využili i slevu nabízenou
v SMS zprávě.

$$\text{Původní cena} \dots 100\% \dots x$$

$$\text{Sleva} \dots 40\%$$

$$\text{Cena po slevě} \dots 60\% \dots 0,6x$$

$$\text{Sleva pro věrné zákazníky} \dots 15\% \text{ z } 0,6x$$

$$\text{Cena po této slevě} \dots 85\% \text{ z } 0,6x \dots 0,85 \cdot 0,6x = 0,51x$$

Věrným zákazníkům se cena snížila o 49%.

12. V oboru $\mathbb{R}$ řešte:

$$\log_3 3x = 6$$

$$3x = 3^6$$

$$3x = 729 \quad / :3$$

$$\underline{\underline{x = 243}}$$

13. V oboru $\mathbb{R}$ řešte:

$$3 \cdot 9^x - 9^x = 6$$

$$9^x(3 - 1) = 6$$

$$9^x \cdot 2 = 6$$

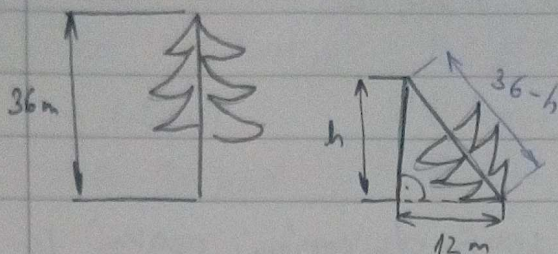
$$9^x = 3$$

$$3^{2x} = 3$$

$$2x = 1$$

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{2}}}$$

14. Ve větru se zlomil 36 m vysoký strom. Vrchol zlomeného stromu se dotýká země, a to ve vzdálenosti 12 m od paty kmebe stromu.
Vypočítejte, v jaké výšce nad zemí (h) se strom zlomil.



$$\begin{aligned}(36-h)^2 &= h^2 + 12^2 \\ 1296 - 42h + h^2 &= h^2 + 144 \\ 42h &= 1152 \\ h &= 16 \text{ m}\end{aligned}$$

Strom se zlomil v 16 metrech nad zemí.

15. Na stole jsou dvě hromádky mincí. Obě hromádky obsahují pouze pětičkorunové a dvoučkorunové mince. První hromádka o 32 minech obsahuje pětinu všech pětičkorunových mincí a polovinu všech dvoučkorunových mincí. Druhá hromádka obsahuje zbyvajících 68 mincí. Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočítejte v korunách hodnotu všech mincí na stole.

x ... počet pětičkorunových mincí, y ... počet dvoučkorunových mincí

1. hromádka: $\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y = 32$ / · 10

2. hromádka: $\frac{4}{5}x + \frac{1}{2}y = 68$ / · 10

$$\begin{aligned}2x + 5y &= 320 \\ 8x + 5y &= 680 \quad / (-) \\ \hline -6x &= -360 \\ x &= 60\end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = \frac{320 - 2x}{5}$$

$$y = 40$$

Celková suma v minech: $60 \cdot 5 + 40 \cdot 2 = \underline{\underline{380 \text{ Kč}}}$

16. Grafem kvadratické funkce $f: y = 9 - x^2$ pro $x \in \mathbb{R}$ je parabola.

Rozhodněte o každém z následujících tvrzení, zda je pravdivé (A) či ne (N).

16.1 Vrchol paraboly je $V[0; 9]$

(A)

$$y = 9 - x^2$$

$$V = [0; 9]$$

16.2 Průsečík paraboly se souřadnicovými osami je $P[-3; 0]$

$$y = 0$$

$$0 = 9 - x^2$$

$$0 = (3 - x)(3 + x)$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -3$$

$$P_{x_1} = [3; 0]$$

$$P_{x_2} = [-3; 0]$$

(A)

16.3 $f(0) = -3$

(N)

$$-3 = 9 - 0^2$$

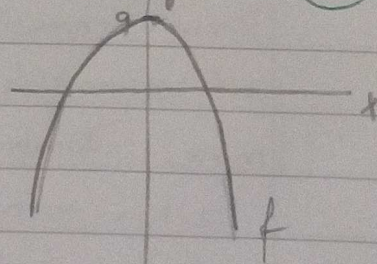
$$-3 \neq 9$$

16.4 Obor hodnot funkce f je $H_f = \leq 9; +\infty)$

(N)

$$y = 9 - x^2$$

→ parabola obrácená dolů



14. Cyklista ujede 3,6 km za 12 minut. Trasa, kterou ujede za půl hodiny, měří na mapě 18 cm. Rychlost cyklisty se nemění. Jaké je měřítko mapy?

$$\begin{aligned} 12 \text{ minut} &= 0,2 \text{ hod} \\ \text{za } 0,2 \text{ hod} &\dots 3,6 \text{ km} \\ \text{za } 1 \text{ hod} &\dots 3,6 \cdot 5 = 18 \text{ km} \\ \text{rychlost} &\dots 18 \text{ km/hod} \\ \text{za } 0,5 \text{ hod} &\dots 9 \text{ km} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow 18 \text{ cm} & 9 \text{ km} = 900000 \text{ cm} & \text{v skutečnosti} \uparrow \\ \uparrow 1 \text{ cm} & x & \end{array}$$

$$x = \frac{900000}{18} = 50000$$

Měřítko je 1:50 000. (c)

18. Čtveřice a_1, a_2, a_3, a_4 představuje čtyři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Platí: $a_1 = 1, a_4 = -8$. Čtveřice g_1, g_2, g_3, g_4 představuje čtyři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Platí: $g_1 = 1, g_4 = -8$.

Aritm. posloupnost:

$$\begin{array}{lll} a_1 = 1 & a_4 = a_1 + 3d & a_2 = 1 - 3 = -2 \\ a_4 = -8 & -8 = 1 + 3d & a_3 = -2 - 3 = -5 \\ & d = -3 & \end{array}$$

Geometr. posloupnost:

$$\begin{array}{lll} g_1 = 1 & g_4 = g_1 \cdot q^3 & g_2 = 1 \cdot (-2) = -2 \\ g_4 = -8 & -8 = 1 \cdot q^3 & g_3 = -2 \cdot (-2) = 4 \\ & q^3 = -8 & \\ & q = -2 & \end{array}$$

D) $a_3 = g_3$ je nepravdivé

19. Čtyřciferné číslo přirozené se má sestavit ze čtyř různých číslic. Na prvním místě má být číslice 2 a na místě desítek lichá číslice.
kolik různých čísel je možné uvedeným způsobem sestavit?

$$1 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 7 = 280 \text{ čísel}$$

(C)

20. Z 25 žáků jedné třídy domácí úkol 3 žáci nevypracovali, 6 žáků jej vypracovalo chybně a zbývající žáci jej vypracovali správně. Učitel náhodně vybere dvojici žáků.
Jaka je pravděpodobnost, že oba vybraní žáci budou mít úkol vypracován správně?

Žáci se správně vypracovaný úkolem: $25 - 3 - 6 = 16$

$$P = \frac{\binom{16}{2}}{\binom{25}{2}} = \frac{16 \cdot 15}{2 \cdot 1} \cdot \frac{2 \cdot 1}{25 \cdot 24} = \frac{2}{5}$$

(A)

21. $A = 1000! \cdot 3!$

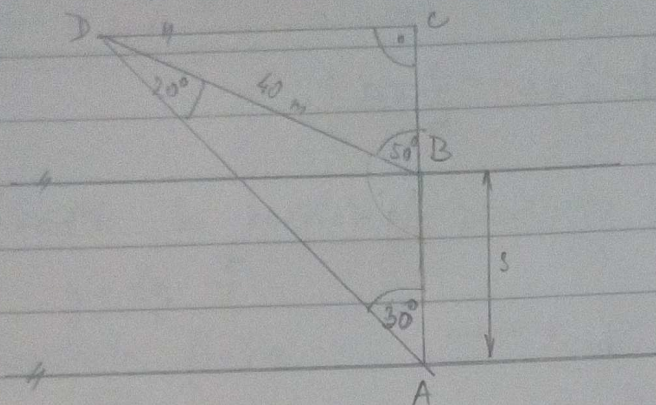
$$B = 999! \cdot 5!$$

kolikrát je číslo A větší než číslo B?

$$\frac{1000! \cdot 3!}{999! \cdot 5!} = \frac{1000 \cdot 999! \cdot 3!}{999! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!} = \frac{1000}{20} = \underline{\underline{50}}$$

(D)

22. Na břehu řeky se žáci učili obsluhovat měřicí přístroje - theodolit a laserový dalekoměr. Změnili následující údaje:
 $|BD| = 40\text{m}$, $\angle ADB = 20^\circ$, $\angle CBD = 50^\circ$, $\angle ACD = \angle BCD = 90^\circ$



Jaká je šířka řeky $s = |AB|$?

$$\sin 30^\circ = \frac{40}{|AD|} \Rightarrow |AD| = \frac{40}{\sin 30^\circ}$$

$$\sin 20^\circ = \frac{s}{|AD|} \Rightarrow |AD| = \frac{s}{\sin 20^\circ}$$

$$\frac{40}{\sin 30^\circ} = \frac{s}{\sin 20^\circ}$$

$$s = \frac{40}{\sin 30^\circ} \cdot \sin 20^\circ$$

$$s = 24,36\text{m} \approx \underline{\underline{24\text{m}}}$$

(B)

- 23 kapka rtuťi tvaru koule o průměru 3 mm se rozdělila na dvě stejně velké kapičky tvaru koule.
Jaký je poloměr nové vytvořené kapičky rtuťi?

Objem koule: $V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{6} \pi d^3$

Objem původní koule:

$$d = 3 \text{ mm}$$

$$V = \frac{1}{6} \pi 3^3 = \frac{9}{2} \pi \text{ mm}^3$$

Objem poloviční koule

$$V_n = \frac{V}{2} = \frac{9}{4} \pi \text{ mm}^3$$

$$\frac{9}{4} \pi = \frac{4}{3} \pi r^3$$

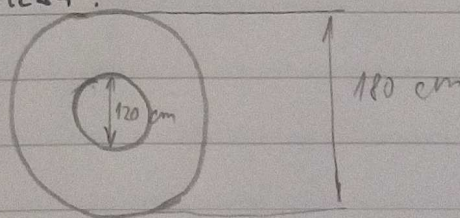
$$r^3 = \frac{27}{16}$$

$$\underline{\underline{r = 1,19 \text{ mm}}}$$

$\Rightarrow \textcircled{C}$

- 24 Cvičební pomůcka z šedé tvrzené pěny je rotační těleso, které lze popsat jako dutý válec. Dutý válec má výšku 70 cm, vnější průměr 180 cm a vnitřní průměr (tj. průměr dutiny) 120 cm

jaký je povrch tělesa?



Povrch = povrch vnějšího válce + povrch vnitřního válce +
povrch dvou mezikruží

$$S_1 = 2\pi r_1 v_1$$

$$S_1 = 2\pi \cdot 0,9 \cdot 0,7$$

$$S_1 = 1,26\pi \text{ m}^2$$

$$S_2 = 2\pi r_2 v$$

$$S_2 = 2\pi \cdot 0,6 \cdot 0,7$$

$$S_2 = 0,84\pi \text{ m}^2$$

$$S_3 = 2\pi (r_1^2 - r_2^2)$$

$$S_3 = 2\pi (0,9^2 - 0,6^2)$$

$$S_3 = 0,9\pi \text{ m}^2$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

$$S = 1,26\pi + 0,89\pi + 0,9\pi$$

$$S = 3\pi$$

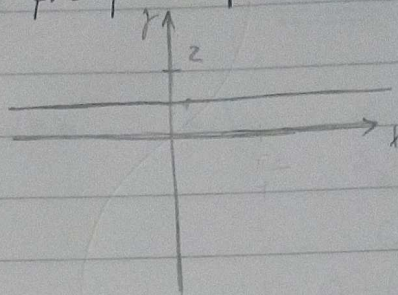
$$S = 9,4 \text{ m}^2$$

$\Rightarrow$ (D)

25. Přirad'te ke každému předpisu funkce odpovídající graf.

25.1 $y = \lg \frac{\pi}{4}$
 $\rightarrow$ konstantní funkce

(F)

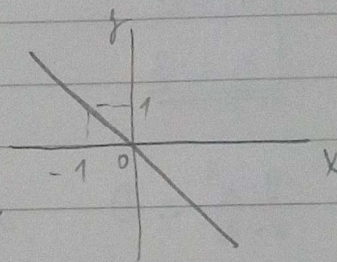


25.2 $y = x \cdot \lg \frac{3\pi}{4}$
 $\rightarrow$ lineární funkce klesající

$$\lg \frac{3\pi}{4} = -1$$

$$y = -1x$$

(A)



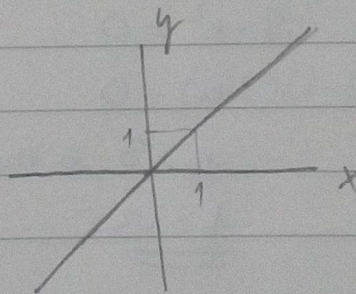
25.3 $y = x \cdot \lg \frac{5\pi}{4}$

$$\lg \frac{5\pi}{4} = 1$$

$$y = x$$

$\rightarrow$ lineární funkce rostoucí

(B)



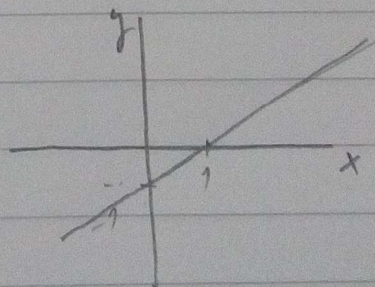
25.4 $y = x + \lg \frac{7\pi}{4}$

$$\lg \frac{7\pi}{4} = -1$$

$$y = x - 1$$

$\rightarrow$ lineární funkce rostoucí

(E)



26. Přiřad'te ke každé rovnici řešení v oboru $\mathbb{R}$ odpovídající množinu všech řešení.

26.1 $x^2 = -3x$

$$x^2 + 3x = 0$$

$$x(x+3) = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

B) $\{-3, 0\}$

26.2 $\frac{9}{x} = x \quad | \cdot x \quad x \neq 0$
 $9 = x^2$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$(x-3)(x+3) = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

A) $\{-3, 3\}$

26.3 $\frac{9-x^2}{x-3} = 0 \quad | \cdot (x-3) \quad x \neq 3$

$$9 - x^2 = 0$$

$$(3-x)(3+x) = 0$$

$x_1 = 3 \Rightarrow$ nespokovuje podmínce

$$\underline{x_2 = -3}$$

E) $\{-3\}$